

# Equações Trigonométricas

---

## Objetivos para Este Capítulo

1. Encontrar uma solução simples para uma equação trigonométrica
2. Aplicar regras para gerar todas as soluções encontrando aquelas que se aplicam a um domínio dado
3. Aplicar métodos de solução simbólica, gráfica e numérica para resolver equações trigonométricas usando o Maple

## Comandos do Maple Usados Neste Capítulo

|                         |                                                                                                                                          |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <code>arccos(A)</code>  | O ângulo cujo cosseno é A.                                                                                                               |
| <code>arcsin(A)</code>  | O ângulo cujo seno é A.                                                                                                                  |
| <code>arctan(A)</code>  | O ângulo cuja tangente é A.                                                                                                              |
| <code>cos(theta)</code> | O cosseno do ângulo $\theta$ , onde $\theta$ está medida em radiano.                                                                     |
| <code>avalf</code>      | Converte soluções contendo $\pi$ para aproximações em decimais.                                                                          |
| <code>plot</code>       | Use a função <i>plot</i> do Maple para visualizar a solução para uma equação trigonométrica.                                             |
| <code>simplify</code>   | Use <i>simplify</i> nas soluções para equações trigonométricas para verificar se é possível alguma simplificação adicional no resultado. |
| <code>sin(theta)</code> | O seno do ângulo $\theta$ , onde $\theta$ é medido em radiano.                                                                           |
| <code>Solve</code>      | O comando <i>solve</i> do Maple funciona para as mais simples equações trigonométricas.                                                  |
| <code>Tan(theta)</code> | A tangente do ângulo $\theta$ , onde $\theta$ é medida em radiano.                                                                       |

## Muitas Soluções a Partir de Uma

Equações trigonométricas geralmente têm infinitas soluções. Este resultado geral é facilmente visto considerando um simples problema. Suponha que você tenha resolvido um problema trigonométrico e encontrou o ângulo  $\theta$  que você está estudando é dado pela equação

$$\sin(\theta) = \frac{3}{5} \quad (10-1)$$

Quais são os valores possíveis de  $\theta$ ?

Você sabe que a solução envolve a função inversa,  $\arcsin(\theta)$ , então você usa sua calculadora:

$$\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 36.87^\circ \quad (\text{modo em graus})$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 0.6435 \quad (\text{modo em radiano})$$

(10-2)

Sua calculadora dá apenas um valor para o inverso de seno, não importa se a sua calculadora está em grau ou radiano.

O Maple é muito menos instrutivo. Se você insere o comando:

**> arcsin(3/5);**

$$\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$$

simplesmente repete o comando sem lhe dar qualquer informação a mais. É claro que ele está querendo lhe dizer que na verdade não existe ângulo *exato* cujo seno é  $3/5$ . Se você pedir a aproximação decimal:

```
> evalf(arcsin(3/5));  

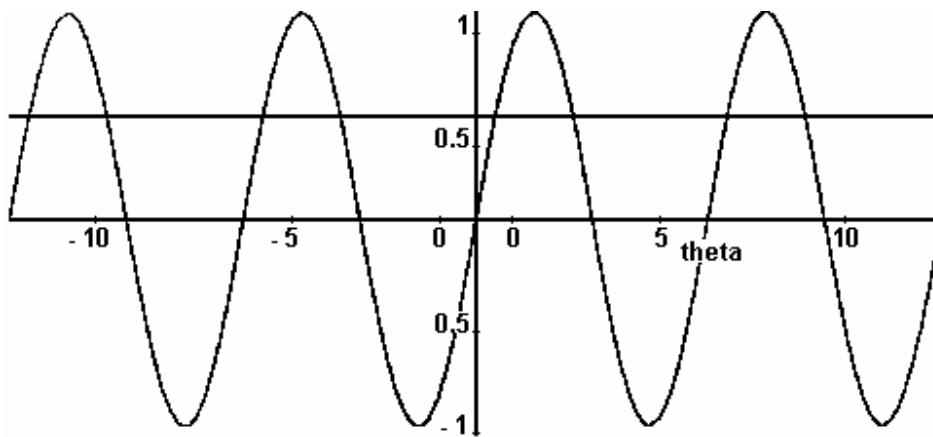
.6435011088
```

você obtém a mesma resposta que conseguiu usando a sua calculadora.

Estas são somente as respostas positivas? Lembre-se de como a função arcseno é descrita em palavras: *o ângulo cujo seno é  $3/5$* . Então, nós estamos procurando as soluções para a equação

$$\sin(\theta) = \frac{3}{5}$$

A solução gráfica é encontrada plotando ambos os lados da Equação 10-3 sob um domínio razoavelmente extenso para  $\theta$ , tal como  $\theta = -4*\text{Pi} \dots 4*\text{Pi}$  (veja Figura 10.1).



**Figura 10.1** Algumas soluções de  $\frac{3}{5} = \sin(\theta)$

```
>plot( { sin(theta), 1/2 }, theta = -4*Pi..4*Pi);
```

Você pode notar que a linha horizontal até 0.6 (ou  $3/5$ ) cruza a curva para  $\sin(\theta)$  em vários lugares. Se o domínio para  $\theta$  for estendido, a linha irá cruzar mais vezes. A função seno oscila atrás e na frente, entre -1 e +1, infinitas vezes como  $\theta$  é permitido crescer vastamente tanto na direção positiva quanto na negativa.

Esses ângulos são todos relacionados; de fato, existem duas relações. A mais simples das duas relações vem da observação que qualquer ângulo maior que  $360^\circ$  (ou  $2\pi$  radiano) é equivalente ao ângulo no domínio  $0 \leq \theta < 360^\circ$ , ou  $0 \leq \theta < 2\pi$  radiano. Desse modo, você pode adicionar ou subtrair qualquer múltiplo de

$360^\circ$  (ou  $2\pi$  radiano) para qualquer solução de  $\theta$  em  $\sin(\theta) = \frac{3}{5}$  e o resultado também será uma solução.

Tente isso na sua calculadora:  $360 + 36.87 = 396.87$ , e  $\sin(396.87) = 0.6$ , ou  $3/5$ . Equivalentemente, você pode testar a solução usando o Maple. Nós vamos achar o seno do número de rotações completas mais o ângulo original. Estude o seguinte comando para ver que nós achamos o valor exato do seno de quatro rotações mais o ângulo original:

**>sin(8\*Pi + arcsin(3/5));**

$$\frac{3}{5}$$

A resposta ainda é  $3/5$ . Se nós pegássemos 100 rotações negativas, a resposta ainda seria a mesma.

**>sin(-200\*Pi + arcsin(3/5));**

$$\frac{3}{5}$$

No último comando do Maple, qual, na verdade, é o ângulo cujo seno nós estamos trabalhando? Adicione os dois termos e expresse-os como um decimal aproximado para obter:

```
>evalf(-200*Pi + arcsin(3/5));
```

-627.6750297

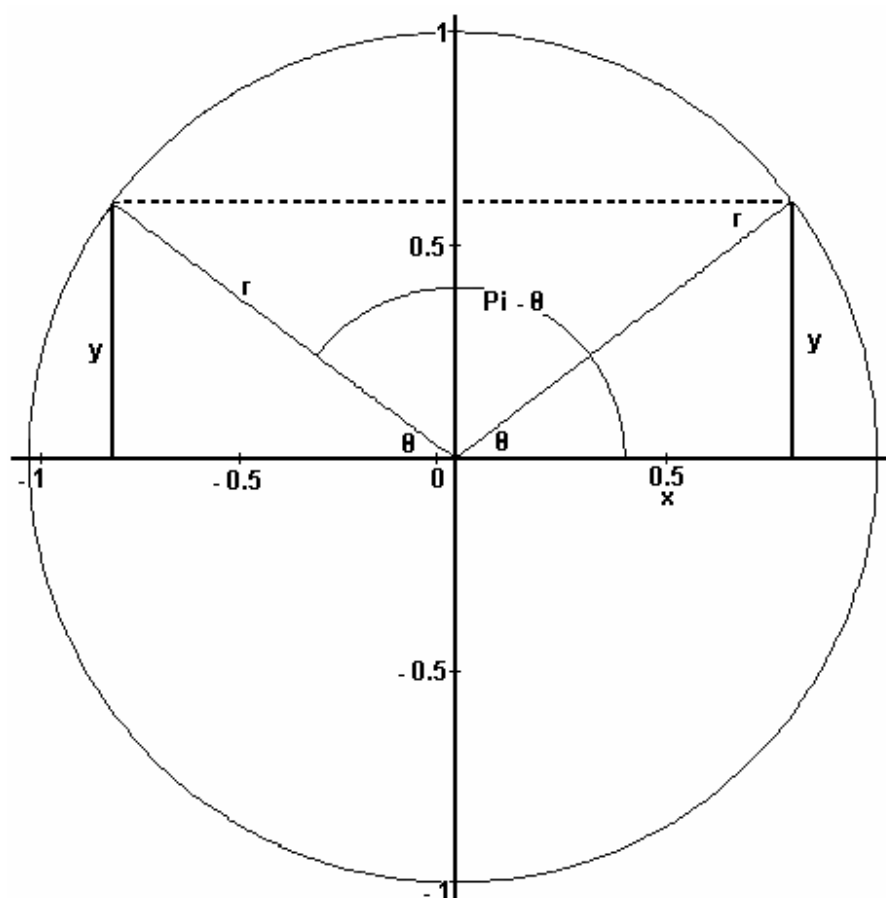
Nós estamos calculando o seno de -627.675 radianos e encontrando que é igual a  $3/5$ ; então, esta é uma solução para a Equação 10-3. Quando nós expressamos o ângulo como uma aproximação decimal, não é tão óbvio que o ângulo esteja relacionado ao ângulo de referência subtraindo 100 rotações completas. Tente o comando:

```
> for i from -10 to 10 do sin(-200*Pi + arcsin(3/5))od;
```

o qual avalia o seno do ângulo para 21 casos diferentes. Ele começa a avaliação adicionando 10 rotações negativas ao ângulo de referência, depois -9 e assim por diante, até alcançar 10 rotações positivas. Em cada caso, o resultado é  $3/5$ . Experimente e verifique o último comando.

Existem outras soluções também. Estas soluções surgem do fato de que os valores das funções trigonométricas se repetem em dois quadrantes do círculo básico. A Figura 10.2 mostra que existe um ângulo no Quadrante 2 com o mesmo seno que um ângulo no Quadrante 1.

Desde de que todos os ângulos estejam medidos com referência ao eixo do  $x$ , o ângulo  $\theta$  possui o mesmo seno que o ângulo  $\pi - \theta$ . Você pode usar a unidade circular para mostrar que  $\cos(\theta) = \cos(2\pi - \theta)$  e  $\tan(\theta) = \tan(\pi + \theta)$ . É claro, qualquer número de revoluções completas pode ser adicionado a estes novos ângulos e eles ainda irão satisfazer a equação original.



**Figura 10.2** Dois Triângulos com o Mesmo Seno.

### Exemplo 10-1

Resolva a equação  $\tan(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$  e mostre todos os possíveis ângulos.

*Solução.* Nós iremos apresentar uma solução assistida no Maple V4:

**> solve ( tan(theta) = 1/sqrt(3), theta);**

$$\frac{1}{6}\pi$$

Observe que o Maple Release 3 não encontra a resposta. Em vez disso, ele simplesmente informa que a solução é:

$$\arctan\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$$

(10-4)

a qual está correta, mas não é útil.

Assumindo que nós temos a solução como  $\theta = \pi/6$ , formamos outras soluções:

**> x := tan(Pi/6): x - 6\*Pi, x - 4\*Pi, x - 2\*Pi, x - 0\*Pi, x + 2\*Pi, x + 4\*Pi, x + 6\*Pi, x + 8\*Pi;**

$$s1 := \frac{1}{3}\sqrt{3} - 6\pi, \frac{1}{3}\sqrt{3} - 4\pi, \frac{1}{3}\sqrt{3} - 2\pi, \frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3} + 2\pi, \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} + 4\pi, \frac{1}{3}\sqrt{3} + 6\pi, \frac{1}{3}\sqrt{3} + 8\pi$$

**> s2 := - 3\*Pi + x, -Pi, + x, x, x + Pi, x + 3\*Pi, x + 5\*Pi, x + 7\*Pi;**

$$s2 := -3\pi + \frac{1}{3}\sqrt{3}, -\pi + \frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3} + \pi, \frac{1}{3}\sqrt{3} + 3\pi, \frac{1}{3}\sqrt{3} + 5\pi, \frac{1}{3}\sqrt{3} + 7\pi$$

Pegue algumas das soluções na s1 ou s2, por exemplo, pegue s1[2] e s2[6]. Use o Maple para obter a tangente:

**> tan(s1[2]), tan(s2[6]);**

$$\tan\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right), \tan\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$$

O Maple informa que estes ângulos possuem a mesma tangente que  $\tan(\pi/6)$ , isto é,  $\sqrt{3}/3$ . À medida que a função tangente é chamada, todos estes ângulos são os mesmos.

Nós estudamos o problema aparentemente simples de encontrar todos os ângulos correspondentes a valor tangente conhecido, pois a maioria das pessoas acham o tópico confuso. É fácil encontrar uma função trigonométrica dado um ângulo: existe somente uma resposta. O problema inverso é complicado pelo fato de que possam existir muitas respostas possíveis. Use a Equação 10-5 para gerar as soluções que se encontram “no outro quadrante.”

$$\sin(n\pi - \theta) = \sin(\theta)$$

$$\cos(n2\pi - \theta) = \cos(\theta)$$

$$\tan(n\pi + \theta) = \tan(\theta) \quad (10-5)$$

Na Equação 10-5,  $n$  pode ser qualquer inteiro ímpar

*Sua Vez:* Use o Maple para avaliar a Equação 10-5 para  $n = 7$ . Já que o Maple possui rotinas básicas de simplificação trigonométrica construídas em um nível mais profundo, você não precisa usar o comando *simplify*. Qual a resposta do Maple quando você digita:

|                                        |                 |
|----------------------------------------|-----------------|
| > $\sin(13*\text{Pi} - \text{theta});$ | Resposta: _____ |
| > $\cos(26*\text{Pi} - \text{theta});$ | Resposta: _____ |
| > $\tan(13*\text{Pi} + \text{theta});$ | Resposta: _____ |

Observe que estes comandos são todos exemplos da Equação 10-5.

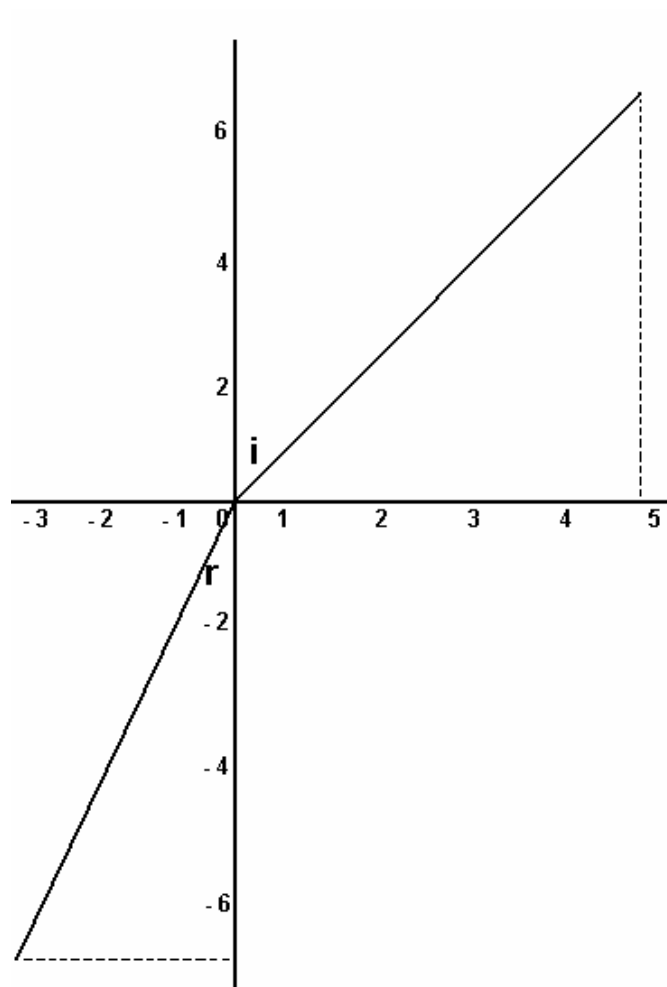
## Especificando o Limite do Domínio das Soluções

A maioria dos problemas que envolvem ângulos desconhecidos oferece algumas dicas sobre o domínio. Esta informação o ajuda a encontrar uma solução começando com a aproximação gráfica. Vamos dizer que você deseja uma solução para o problema ilustrado na Figura 10.3. O diagrama mostra a trajetória de um raio de luz: à medida que ele viaja na porção superior direita, é introduzida uma substância transparente como vidro, e continua através do vidro à inferior esquerda. Isto é um fato físico que o raio de luz se inclina quando entra em uma substância diferente a qualquer ângulo refração.

A relação entre o ângulo de incidência,  $i$ , o ângulo de refração,  $r$ , e o *índice de refração*,  $n$ , é dado pela lei de Snell:

$$\frac{\text{sen}(i)}{\text{sen}(r)} = n$$

(10-6)



**Figura 10.3** A Refração de um Raio de Luz

### Exemplo 10-2

Encontre o índice de refração,  $n$ , para as condições mostradas na Figura 10.3.

*Solução.* No gráfico,  $\tan(i) = 7/5$ ,  $\tan(r) = 3/7$ , nós vemos que os ângulos devem ser menores que  $90^\circ$ . Os ângulos que são encontrados usando o inverso da função tangente,  $i = \arctan(7/5)$ ,  $r = \arctan(3/7)$ . Visto que a função  $\arctan$  do Maple retorna um ângulo entre  $-\pi$  e  $\pi$ ,

```
> i = evalf(180*arctan(7/5)/Pi);
```

```
i = -54.46232221
```

```
> i = evalf(180*arctan(3/7)/Pi);
```

```
r = 23.19859051
```

Você pode determinar  $r$  através do comando do Maple:

```
> n = evalf(sin(arctan(7/5))/sin(arctan(3/7)));
```

```
n = 2.065736495
```

Observe que, neste exemplo, nenhum dos ângulos é um ângulo de referência, pois ambos são definidos em termos do eixo  $y$  em vez do eixo  $x$  positivo. De fato,  $i$  é definido com referência ao eixo  $y$  positivo, e  $r$  é definido com referência ao eixo  $y$  negativo.

### Exemplo 10-3

Dado um material cujo índice de refração,  $n$ , é 1.4, encontre o ângulo de refração,  $r$ , se o ângulo de incidência,  $i$ , é  $75^\circ$ .

*Solução.* Reordene a Equação 10-6 para obter  $\sin(r) = \sin(i) / n$ . Usando o Maple para aplicar a função inversa:

```
> r = evalf(180*arcsin(sin(Pi*75/180)/1.4));
```

```
r = 43.62591508
```

O ângulo de refração está em torno de 43.6 graus. Observe como os ângulos foram convertidos para radianos ou graus quando necessário, e observe especialmente como a função arcseno foi usada para encontrar  $r$ . Você pode ter resolvido o problema em três passos, primeiro encontrando  $\sin(i)/n$ , depois avaliando o arcseno para encontrar  $r$  em radianos e, finalmente, convertendo  $r$  para graus de volta. Esta é uma boa maneira de resolver o problema. Perceba que você pode construir a linha de entrada do Maple acima usando os três passos. Cada comando sucessivo se torna um “delimitador” para comandos fechados.

*Sua Vez:* Encontre o ângulo  $i$  se  $n = 1.432$  e  $r = 10.7^\circ$ . *Resposta:* \_\_\_\_\_

#### Exemplo 10-4

Uma fonte de voltagem de uma corrente alternada (AC) é dada pela equação:

$$v(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$$

(10-7)

A *amplitude* da onda de voltagem é  $A$  medida em volts. A *frequência angular* é  $\omega$ , medido em radianos por segundo, e  $\alpha$  é o *período*, medido em radianos. Um problema prático é encontrar o menor tempo *positivo* quando a voltagem primeiro atinge algum valor.. Os dados são os seguintes:  $A = 17.5$  V,  $\omega = 376,99$  rad/s, e  $\alpha = 5,535$  rad. Qual é o mínimo tempo positivo quando a voltagem,  $v(t)$ , atinge o valor de +5 V?

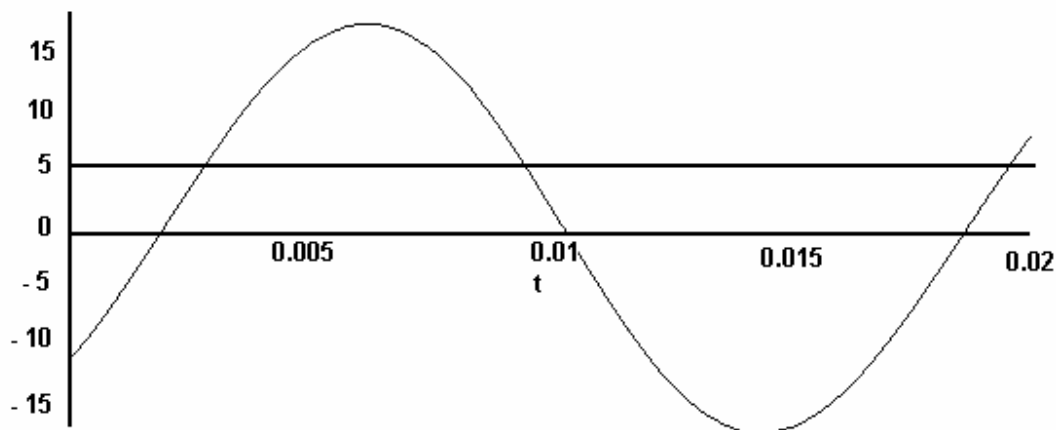
*Solução.* Sempre construa o gráfico do problema se você puder. Neste caso, você pode obter rapidamente uma solução aproximada com o comando:

```
> plot( { 5, 17.5*sin(376.99*t + 5.535) }, t = 0 .. 0.02);
```

A onda seno aumenta para +5V em aproximadamente 0.00275 s (2.75 ms) (veja Figura 10.4). Agora nós temos a solução analítica, usando o Maple. O primeiro passo é simplificar o ângulo fazendo a substituição:

```
> e3a := theta = 376.99*t + 5.535;
```

A seguir resolva para theta:



**Figura 10.4** Solução Gráfica para a Equação  $17.5 \sin(376.99t + 5.535) = 5$

```
> theta := arcsin(5/17.5);
```

```
theta := .2897517014
```

Tenha cuidado com o próximo passo! Nós temos a equação e3a, apresentando  $t$  em termos de  $\theta$  então, você pode achar que tudo que deve ser feito é resolver para  $t$ :

```
> solve(e3a, t);
```

```
- .1391349452e-1
```

A resposta é negativa! Não é o valor de  $t$  que nós queremos. (É uma *solução*, no entanto.) Já que nós queremos um tempo posterior, temos que usar um ângulo maior. O próximo maior ângulo é obtido pela Equação 10-5, com  $n = 1$ .

```
> theta := evalf(Pi-theta); e3a := theta = 376.99*t + 5.535; solve(e3a, t);
```

```
- .7117321539e-2
```

Desta vez ainda é negativo, mas está próximo à origem. Nós usamos a mesma seqüência de comandos, desta vez com  $\theta$  uma revolução completa maior do que o valor original.

**> theta := arcsin(5/17. 5); theta := evalf(2\*Pi + theta); e3a := theta = 376.99\*t + 5.535: solve (e3a, t);**

$$. 2753221595e^{-2} \text{ (2.75 ms)}$$

Temos que dar a theta seu valor original mais uma vez. Este é o objetivo do comando **> theta := arcsin(5/17. 5);**, que inicia a seqüência. Provavelmente será mais simples usar o valor decimal de theta e construir comandos como **< solve(2\*Pi + 0.28975 = 376.99\*t + 5.535, t)**, em vez de tentar reaproveitar os comandos anteriores. Por outro lado, a solução analítica oferece uma solução mais precisa, tendo no resultado uma precisão de três casas decimais.

*Sua Vez.* Encontre o menor tempo positivo quando  $v(t) = -50 \text{ V}$  se, na Equação 10-7,  $A = 150\text{V}$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ , e  $\alpha = 4 \text{ rad}$ .

*Resposta:* \_\_\_\_\_

Mais uma vez, nós enfatizamos a solução gráfica que nos mostrou a solução para este problema complicado de uma maneira altamente visual. Na solução analítica, nós tivemos que aplicar identidades trigonométricas e redefinir os valores de theta tornando-os sucessivamente maiores, até que a solução alcançasse um tempo positivo.

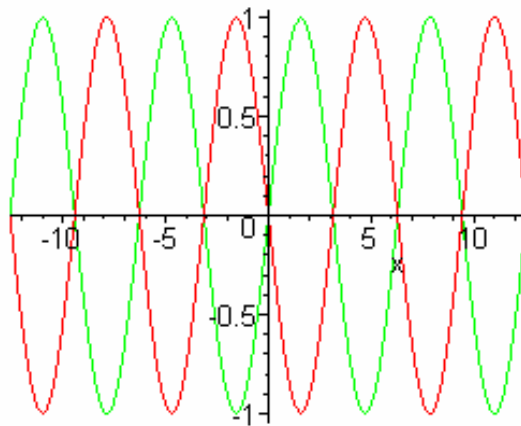
## Tenha Cuidado para não Apresentar Soluções Extras

Muitos autores sugerem que, ao lidar com identidades, você deve trabalhar com cada lado da equação mas não deve aplicar qualquer operação para ambos os lados de uma vez só. Como uma simples ilustração, considere a equação trigonométrica:

$$\sin(x) = -\sin(x) \quad (10-8)$$

Esta equação não possui uma solução. Qual número é igual ao seu negativo? O número só pode ser 0, já que  $0 = -0$  e nenhum outro número possui esta propriedade. A solução deve ser  $x = 0$ , mas esta é a única solução? Um gráfico oferece uma resposta quase imediata (veja Figura 10.5).

```
> plot( { sin(x), -sin(x) }, x = -4*Pi .. 4*Pi);
```



**Figura 10.5** Resolvendo Identidades

As duas curvas são imagens espelho uma da outra. O eixo do  $x$  serve como um espelho. O gráfico mostra que Eq. 10-8 possui um número infinito de soluções, ...  $-3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi \dots$

O que teria acontecido se você elevasse ambos os lados ao quadrado? A equação se transformaria em

$$\sin(x)^2 = \sin(x)^2$$

(10-9)

o que é uma identidade ! Normalmente elevar ao quadrado ambos os lados de uma equação apresenta soluções extras, e desta vez apresenta um número infinito delas.

## Não Desperdice Soluções

Na última seção, nós vimos que soluções extras podem ser apresentadas elevando ao quadrado ambos os lados de uma equação. Desta vez, nós teremos que ter cuidado ou nós perderemos uma solução. Nós escolhemos a equação

$$\cos(\theta) = \left( \frac{3}{2} - \sin(\theta) \right) \cos(\theta)$$

(10-10)

Cancelando o termo comum,  $\cos(\theta)$ , o Maple resolverá o restante:

```
> solve(solve(3/2-sin(theta)=1));
```

$1/6*\text{Pi}$

Mas olhe o que acontece quando nós damos ao Maple a equação original:

```
> eq := cos(theta) = (3/2-sin(theta))*cos(theta): solve(eq);
```

$1/2*\text{Pi}, 1/6*\text{Pi}, 5/6*\text{Pi}$

O Maple nos oferece mais soluções. De onde elas vieram! Nós cancelamos o termo comum, mas nós só temos permissão para fazer isto se não for zero. Se  $\cos(\theta) = 0$ , então  $\theta = 1/2*\text{Pi}$ . Esta solução vem de um termo  $\cos(\theta)$  “descartado”. A outra solução vem da solução para  $\left( \frac{3}{2} - \sin(\theta) \right)$ . Desta vez, o Maple decidiu incluir a solução “ $\pi - \theta$ ” também.

# Lápis e Papel

## LP - 1

Resolva as seguintes equações trigonométricas no domínio especificado. (Algumas podem não ter solução!) Use as definições básicas das funções trigonométricas para justificar suas respostas.

(a)  $\sin(x) = \cos(x) + 1, 0 \leq x < 2\pi$

Resposta: \_\_\_\_\_

(b)  $\sin(x) - 1 = \cos(x) + 1, 0 \leq x < 2\pi$

Resposta: \_\_\_\_\_

(c)  $\tan(x) = \cos(x), 0 \leq x < 2\pi$

Resposta: \_\_\_\_\_

(d)  $\sec(x) = \csc(x), 0 \leq x < 2\pi$

Resposta: \_\_\_\_\_

(e)  $\tan(x) = \sin(x), 0 \leq x < 2\pi$

Resposta: \_\_\_\_\_

(f)  $\sin(x) = \cos(x), 0 \leq x < 360^\circ$

Resposta: \_\_\_\_\_

(g)  $\tan(x) = \cos(x), 0 \leq x < 360^\circ$

Resposta: \_\_\_\_\_

(h)  $\cos(x) = -\cos(x), 0 \leq x < 360^\circ$

Resposta: \_\_\_\_\_

## LP - 2

Resolva  $\sin(\theta)(3/2 - \cos(\theta)) = \sin(\theta), 0 \leq \theta < 2\pi$

Resposta: \_\_\_\_\_

## LP - 3

Resolva as seguintes equações trigonométricas no domínio especificado:

(a)  $\cos(A) = 1/2, 0 \leq x < 2\pi$

Resposta: \_\_\_\_\_

(b)  $2\cos(a) = -2, 0 \leq x < 2\pi$

Resposta: \_\_\_\_\_

(c)  $2\cos(a/2) = -2, 0 \leq x < 2\pi$

Resposta: \_\_\_\_\_

(d)  $2\sin(x) = \sqrt{3}, 0 \leq x < \pi/2$

Resposta: \_\_\_\_\_

(e)  $2\sin(x) = -\sqrt{3}, -2\pi \leq x < 0$

Resposta: \_\_\_\_\_

(f)  $\tan(2A) = -3/2, 0 \leq x < \pi/2$

Resposta: \_\_\_\_\_

## LP - 4

(a) Dado  $A \sin(x + y) = n$ , determine  $n$  se  $A = 10$ ,  $x = 30^\circ$ , e  $y = 45^\circ$ .

Resposta: \_\_\_\_\_

(b) Dado  $\sin(a - b) = 3/4$ , e  $b = \pi/12$ , encontre o menor valor positivo de  $a$  que satisfaça a equação.

Resposta: \_\_\_\_\_

# Laboratório Maple

## LM -1

A dificuldade em resolver equações trigonométricas surge porque geralmente existe um número infinito de soluções para uma equação trigonométrica.

*Exemplo 10-5.* Considere o problema de encontrar todas as soluções para a equação  $2\cos(x) - 1 = 0$ :

```
< ex1 := 2*cos(x) - 1;
```

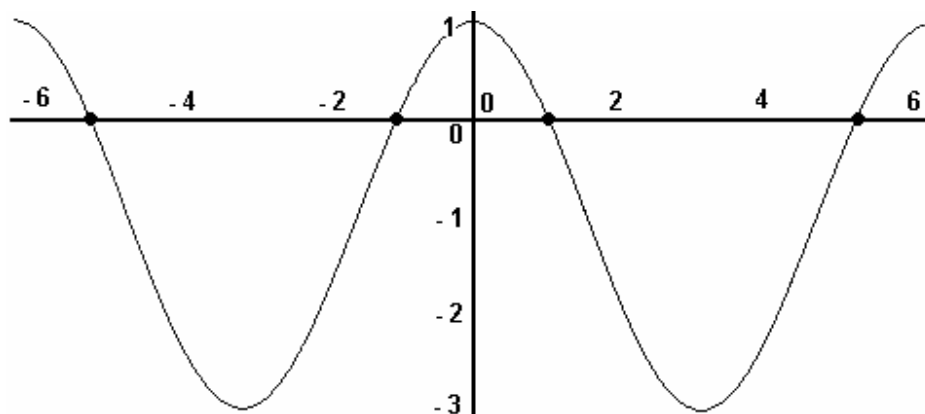
$$ex1 := 2 \cos(x) - 1$$

Nós temos uma solução para a equação a cada ponto onde o gráfico de  $ex1$  corta o eixo  $x$ , pois  $ex1 = 0$  nestes locais. O gráfico da expressão mostra onde ele corta o eixo do  $x$  (Figura 10.6):

```
< plot( ex1, x = -2*Pi .. 2*Pi);
```

O círculo marca as soluções. Você pode ver que se nós estendermos o gráfico em ambas as direções, nós encontraremos tantas soluções quantas gostaríamos. Isto levanta um ponto importante. Nós devemos saber outras informações sobre o ângulo que nós estamos procurando se queremos limitar o número de soluções.

Podemos deixar que o Maple encontre uma solução. Se nós dermos ao Maple a equação como parte do comando *solve*, provavelmente só obteremos uma do infinito número de soluções.



**Figura 10.6** Gráfico de  $y = 2 \cdot \cos(x) - 1$

**> solve ( ex1, x);**

$$\frac{1}{3}\pi$$

O Maple encontra uma solução. Na verdade, é a menor solução positiva, por volta de  $x = 1$ . As outras soluções podem ser encontradas a partir desta, mas nós devemos voltar à definição fundamental da função coseno se quisermos compreender todas as soluções possíveis. Você sabe que  $\cos(-x) = \cos(x)$ , então qualquer solução que você encontra imediatamente gera outra solução, o negativo da primeira solução. Então,  $-\frac{1}{3}\pi$  também é uma solução para  $y = 2 \cdot \cos(x) - 1$ . Para provar isto, simplesmente substitua este valor em *ex1* e verifique que a expressão é avaliada em 0:

**> ex1a := subs( x = -Pi/3, ex1);**

$$\text{ex1a} := 2 \cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) - 1$$

**> simplify(ex1a);**

$$0$$

Nós podemos escrever isto como um ângulo *positivo* se você quiser. Este ângulo ainda será menor que  $360^\circ$ . O ângulo  $-x$  é o mesmo que o ângulo  $2\pi - x$ ,  $x$  em radianos, ou  $360 - x$ ,  $x$  em graus. No nosso problema, o ângulo é  $-\pi/3$ , o qual pode ser expresso como  $+5\pi/3$ ; então  $5\pi/3$  também é uma solução. Nós verificamos que é uma solução da seguinte maneira:

**> ex1b := subs(x = 5\*Pi/3, ex1);**

$$ex1b := 2 \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) - 1$$

**> simplify (ex1b);**

0

Agora, nós podemos encontrar todas as soluções. Acrescentando uma volta inteira, ou qualquer número de voltas inteiras a nossas duas soluções já encontradas deve produzir uma solução. Então, o conjunto total de soluções é:

$$\left\{ \frac{1}{3}\pi + 2n\pi, \frac{5}{3}\pi + 2n\pi \right\}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, etc$$

onde  $n$  é qualquer inteiro. Você pode verificar qualquer uma destas soluções. Por exemplo, dado  $n = 6$ .

**> ex1c := subs( x = 1/3\*Pi + 2\*6\*Pi, ex1);**

$$ex1c := 2 \cos\left(\frac{37}{3}\pi\right) - 1$$

**> simplify (ex1c);**

0

## Sua vez

(a) Encontre todas as soluções para  $3 \cos(x) - 2 = 0$ . Estabeleça o resultado exato, não a aproximação decimal.

Resposta: \_\_\_\_\_

(b) Encontre todas as soluções para  $17 \sin(x) - 18 = 0$

Resposta: \_\_\_\_\_

(c) Faça o gráfico do lado esquerdo da equação do exercício (b). O gráfico confirma sua resposta ou você precisa modificá-lo?

Resposta: \_\_\_\_\_

## LM -2

Resolva a equação  $5*(1 + \sin(x)) = 2*\sin(x) + 3$ .

A solução deve ser um ângulo entre 0 e  $2*\pi$ :

```
>ex2a :=5*(1+sin(x))=2*sin(x)+3;
```

Primeiro, você deve resolver para  $\sin(x)$

```
>ex2b :=solve(ex2, sin(x));
```

Isto mostra que  $\sin(x) = -2/3$ , então fazemos dela nossa próxima equação:

```
>ex2c :=sin(x) = -2/3;
```

Nós poderíamos resolver isto simplesmente, calculando o  $\arcsin(-2/3)$ , ou poderíamos usar o comando *solve*:

```
>ex2d :=solve( ex2c,x);
```

Nós temos o mesmo resultado! O Maple não pode reduzir mais esta solução e ainda estar completamente exata! Nós usamos *evalf* para obter uma solução numérica:

```
>ex2e :=evalf(ex2d)
```

Um ângulo de  $-x$  é o mesmo ângulo  $2*\pi + x$ ; então a outra solução é:

**>ex2f :=evalf(2\*Pi+ex2e);**

Este ângulo está entre 0 e  $2\pi$ ; então, esta é uma das soluções que estamos procurando. A outra solução é encontrada observando isso:

$$\sin(x) = \sin(\pi - x)$$

**>ex2g :=evalf( Pi-ex2e);**

Finalmente, substituímos a nossa solução pela equação original para verificar:

**>evalf(subs(x=ex2f, ex2a));**

**>evalf( subs ( x=ex2g, ex2a));**

As duas soluções satisfazem a equação original e estão entre 0 e  $2\pi$ . Assim, estas são as soluções desejadas.

*Sua vez.* Siga os passos anteriores para achar a solução para a equação

**>eq := -5\*(1 - sin(x)) + 6 = 2\*sin(x) + 3;**

A solução deve ser um ângulo entre  $-\pi$  e  $\pi$ .

*Resposta:* \_\_\_\_\_

## **LM -3**

Resolva a equação,  $2 \cos(x)^2 - \sin(x) - 1 = 0$  ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ):

**>ex3 :=2\*cos(x)^2-sin(x)-1=0;**

O método usual requer a substituição para  $\cos(x)^2$  para obter a equação somente em termos de  $\sin(x)$ . Deixe o Maple resolver estas equações.

```
>ex3a :=solve( ex3,x);
```

Nada mal o único problema é que o Maple não achou *todas* as soluções, e isso relatou uma solução negativa. Ao invés de botar as soluções no intervalo de 0 a  $2\pi$ , ele botou as soluções encontradas no intervalo de  $-\pi$ ..  $+\pi$ .

*Nota:* É sempre bom fazer o gráfico de uma equação para tentar encontrar suas soluções. Mas o Maple não pode plotar equações, só expressões! A solução é fazer o gráfico do lado esquerdo da equação. Os lugares onde esta curva corta o eixo do  $x$  são as soluções que nós estamos procurando (Figura 10.7).

```
> plot( lhs(ex3), x = 0 .. 2*Pi);
```

Para estudar mais precisamente as soluções em torno de  $x = 5$ , nós expandimos o gráfico no intervalo 4.5 .. 4.9:

```
> plot( lhs(ex3), x = 4.5 .. 4.9);
```

Começa a parecer como se a curva toca o eixo do  $x$ . Já que ela não corta o eixo, existe somente uma solução: o ponto onde ela o toca. Este ponto é  $x = 4.71$ . Nós também podemos verificar esta solução:

```
> evalf (subs( x = 4.71, ex3));
```

Esta convenção não é exata; então nós podemos ajustar o número 4.71 levemente.

```
> evalf (subs( x = 4.712, ex3));
```

Deste modo,  $x = 4.712$  nos oferece um resultado muito melhor. Você poderá querer aplicar as idéias expressas no Exemplo 10-2 para encontrar o valor exato.

Além de resolver as equações analiticamente, oferece uma solução gráfica e verifica cada solução substituindo a anterior:

Encontre todas as soluções no intervalo  $0 \leq x \leq 2\pi$  para a equação  $eq3$  seguindo o método resumido acima.

$$< eq3 := 2*\sin(x)^2 - \cos(x) - 1 = 0$$

Resposta: \_\_\_\_\_

#### **LM -4**

Resolva  $2*\sin(x) + 1 = 0, 0 \leq x \leq 2*\pi$

Resposta: \_\_\_\_\_

#### **LM -5**

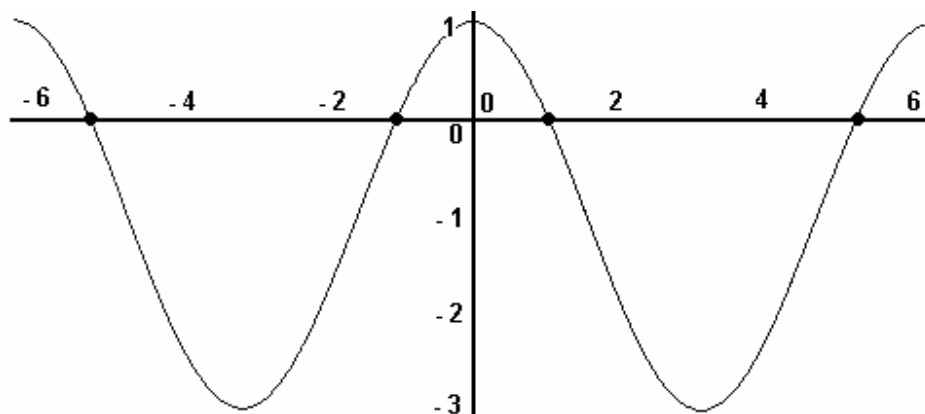
Resolva  $2*\cos(x)^2 - 2*\cos(2*x) - 1 = 0, 0 \leq x \leq 2*\pi$

Resposta: \_\_\_\_\_

#### **LM -6**

Resolva  $4*\tan(x) - 2 \sec(x)^2 - 1 = 0, 0 \leq x \leq 2*\pi$

Resposta: \_\_\_\_\_



**Figura 10.7** As soluções para  $2*\cos(x)^2 - \sin(x) - 1 = 0$

## LM -7

Resolva  $\cos(3*x)*\cos(x) - \sin(3*x)*\sin(x) = 0$ ,  $0 \leq x \leq 2*\pi$

Resposta: \_\_\_\_\_

## LM -8

Diga quais são identidades (resposta verdadeiro ou falso):

(a)  $\sin(x)*(csc(x) - \sin(x)) = \cos(x)^2$

Resposta: \_\_\_\_\_

(b)  $\cos(y)^2 - \sin(y)^2 = (1 - \tan(y)^2)/(1 + \tan(y)^2)$

Resposta: \_\_\_\_\_

(c)  $(1 + \cos(2*x)) / \cos(x)^2 = 1$

Resposta: \_\_\_\_\_

(d)  $\sin(x/2)*\cos(x/2) = (\sin(x))/2$

Resposta: \_\_\_\_\_

## LM -9

Você está projetando um robô arma como parte de um projeto eletrônico. Você desenvolveu uma equação para o ângulo crítico entre duas seções da arma:

$$\text{eq9} := \cos(\text{theta}) + 1.3 * \cos(2 * \text{theta}) = 0;$$

**(a)** Plote o lado esquerdo da eq9 para determinar uma solução no intervalo:

$$0 \leq \text{theta} \leq \text{Pi}$$

Esboce o gráfico aqui:

*Respostas:* A solução, pelo gráfico é: \_\_\_\_\_ rad.

Esta solução, convertida em graus é: \_\_\_\_\_ graus.

**(b)** Resolva a equação usando o comando *solve*.

*Respostas:* A solução dada por *solve* é: \_\_\_\_\_ rad.

A solução dada por *solve* é: \_\_\_\_\_ graus.